№1 ЛАБОРАТОРИЯЛЫҚ ЖҰМЫС
ЫҚТИМАЛДЫҚ ҮЛЕСУІНІҢ БИНОМДЫҚ ЗАҢЫ

1.1 **Жұмыс мақсаты**

Биномдық үлесуді тәжірибе жүзінде тексеру және биномдық үлесуді Гаусс, Лаплас-Гаусс үлесулерімен салыстыру.

1.2 **Қысқаша теориялық кіріспе**

1.3 Детерминантты және статистикалық заңдылықтар

Табиғат заңдарын себеп пен салдардың көрінуіне қарай детерминантты және *статистикалық* деп екіге бөлуге болады. Мысалы, Күн жүйесі планеталарының дәл бір уақыт мезетіндегі орналасуы бойынша планеталардың кез-келген уақыттағы координатын алдын-ала табуға, оның ішінде, алдағы болатын Күн және Ай тұтылуын да дәлме-дәл болжауға болады. Бұл-оқиға салдары себеппен анықталатын *детерминантты* заңдылық мысалы.

Бірақ, жоғарыда айтқандай, макроөлшем құбылыстарының бәрін бірдей алдын-ала болжауға болмайды.

Мысалы, механика заңдарын қолданып, жоғары лақтырылған тиынның қай жағымен: “елтаңба” не “сан” жағымен түсетінін алдын-ала білу мүмкін емес. Түсу нәтижесі туралы тек белгілі бір ықтималдықпен айтуға болады. Мұндай заңдылықтар *статистикалық заңдылықтар* деп аталады.

Тек тиынның “елтаңба” және “сан” жағымен түсу ықтималдықтары бірдей болғандықтан ғана, тиынның “елтаңба” жағымен түсу ықтималдығы 0,5 немесе 50% деп айтуға болады. Бұл, әрине, егер тиынды 10 рет лақтырсақ, соның бесеуінде “елтаңба”, қалған бесеуінде “сан” жағы міндетті түрде түседі деген сөз емес. Лақтыру (сынақ) саны неғұрлым көп болса, айтылған заңдылық соғұрлым дәлірек орындалады, яғни статистикалық заңдардың шындығына тек сынақ саны өте көп экспериментте ғана көз жеткізуге болады.

Принципті түрде айтқанда, егер тиынның бастапқы жылдамдығы, лақтырылу бұрышы, ортаның кедергі күші, осы нүктедегі еркін түсу үдеуі, т.б. тиын қозғалысына әсер ететін барлық факторлар белгілі болса, жоғарыда келтірілген мысалда жеке бір сынақ нәтижесін дәл болжауға болар еді. Ал практика жүзінде тиын қозғалысына әсер етуші барлық факторларды, олардың бір-біріне өзара әсерін толығымен ескеру мүмкін болмағандықтан, лақтыру нәтижесі кездейсоқ шама болады.

Микроәлемнің көп негізгі заңдары бұдан да аз детерминантты болып келеді. Мысалы, кванттық физика тұрғысынан электронның белгілі бір уақытта кеңістіктің белгілі бір нүктесінде болуы белгілі бір ықтималдықпен ғана жорамалданады.

Молекулалық физика табиғаттың детерминантты заңдарына бағынатын макроскопиялық процестер мен негізінен статистикалық заңдылықтарға бағынатын квантты механикалық процестер арасындағы құбылыстарды зерттейді. Сондықтан, газ бен сұйықта өтетін құбылыстарды феноменологиялық тұрғыдан да (термодинамика), статистикалық тұрғыдан да (молекулалық кинетикалық теория) қарастыруға болады.

Молекулалық физикада көп бөлшектен тұратын макроскопиялық жүйенің ықтималдығын және тепе-теңдік күй мен ықтималды күйдің арасындағы қатынасты анықтау үшін ықтималдықтың биномдық үлесуі пайдаланылады. Осы үлесуді қолданып, салыстырмалы флуктуацияның жүйедегі бөлшектер санына тәуелділігін де тағайындауға болады. Бұған қоса, идеал газ үлгісі мен кездейсоқ үзіліссіз шамалардың ықтималдық тығыздығының Гаусс үлесуі арасында терең аналогия бар. Соңғы үлесуді пайдаланып, молекулалардың жылдамдық және энергия бойынша Максвелл үлесуін қорытып шығаруға болады.

1.2.2 Ықтималдық теориясының негізгі ұғымдары

Белгілі бір шарттар орындалғанда міндетті түрде болатын оқиғаны *ақиқат оқиға* дейді.

Берілген шарттар кезінде мүлдем болмайтын оқиғаны *мүмкін емес оқиға* деп айтады.

Берілген шарттар кезінде болуы да, болмауы да мүмкін оқиға *кездейсоқ оқиға* боп табылады. Осы оқиғаның болу мүмкіншілігін *ықтималдық* деп аталатын ұғыммен бағалаймыз.

Тәжірибенің (сынақтың) үйлесімсіз барлық мүмкін нәтижелері *элементар оқиғаларды* құрайды. Мысалы, тиынды бір рет жоғары лақтыру-тәжірибе (сынақ),ал тиынның “елтаңба”(А оқиғасы)немесе “сан” жағымен түсуі (В оқиғасы)- элементар оқиғалар. Сонымен, осы тәжірибедегі элементар оқиғалар саны 2-ге тең.

А оқиғасының Р ықтималдығы деп А-ға қолайлы элементар оқиғалар санының барлық мүмкін оқиғалар санына қатынасын айтады.

Классикалық жағдайда тәжірибе нәтижесі тең ықтималды элементар оқиғалардың шекті санынан құралады.

Мысалдар:

1.Тиын лақтырылғанда “елтаңба” жағымен түсу ықтималдығы “сан” жағымен түсу ықтималдығына тең және 1/2 болады.

2. Алты жақтары 1, 2, 3, 4, 5 және 6 сандарымен белгіленген ойын тасының кез-келген нөмірінің түсу ықтималдылығы бірдей және 1/6-ге тең.

1.2.3 Биномдық үлесу

Тиынның “елтаңба” жағымен түсу ықтималдығы 1/2-ге тең екеніне қалай көз жеткізуге болады? Ол үшін n тәжірибе нәтижесінде 50% “елтаңба”, 50% “сан” жағы түсу керек. Практикада егер n саны аз болса, бұл жүзеге аспауы мүмкін. Мысалы, 10 рет лақтырылғанда “елтаңба” жағы - 5 рет, “сан” жағы - 5 рет болмауы әбден мүмкін. Бірақ, тәжірибе саны n өскен сайын тең ықтимал заңдылығы дәлірек орындалады: 100 сынақта 10-ға қарағанда дәлірек, 1000 сынақта одан да дәлірек. Абсолютті тең үлесу ықтималдық (50х50) $n \rightarrow \infty$ орнайды. Іс жүзінде тәжірибе саны шектеулі болады. Сондықтан мынадай сұрақ туады: n сынақ өткізгенде “елтаңбаның” $n/2$ рет түсу ықтималдығы неге тең? Немесе, жалпы айтқанда, n сынақта “елтаңбаның” 0,1,2,…,к,…, n рет түсу ықтималдығы қандай?

Сонымен, сынақ *n* рет жүргізілсін. Осы кезде "елтаңбаның" *к* рет түсу ықтималдығы (яғни А оқиғаның *к* рет болуы) биномдық үлесу заңына бағынады.

$$w\left(\frac{k}{n}, p\right) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (1.1)$$

мұнда $C_n^k = n! / k!(n-k)!$ - *n*-нен *k* бойынша теру,

p–"елтаңбаның" жеке бір рет лақтырғанда түсу ықтималдығы (немесе А оқиғасының ықтималдығы),

q–"елтаңбаның" жеке бір рет лақтырғанда түспеу ықтималдығы (немесе, жеке бір сынақта А оқиғасының болмай, В оқиғасының-тиынның "сан" жағымен түсуінің-ықтималдығы).

(1.1) өрнекті қорыту **1 ҚОСЫМШАДА** келтірілген.

Биномдық үлесу төменгі шарттар үшін орындалады:

- Сынақ саны *n* тұрақты.
- Әрбір сынақ нәтижесі басқа сынақ нәтижелеріне тәуелсіз (тәуелсіз элементар оқиғалар).
- А оқиғасының болу ықтималдығы сынақ нөміріне тәуелді емес, яғни *p=const*.
- А оқиғасының болмау ықтималдығы *q=1-p*.

Аталған шарттар жиынтығы *биномдық эксперименттің математикалық моделі (үлгісі)* деп аталады.

<u>Мысалдар:</u>

1. 10 рет лақтырылған тиынның 6 рет "елтаңба" жағымен түсу ықтималдығы (p=1/2):

$$w(6/10,1/2) = \frac{10!}{6!4!}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{210}{1024} = 0{,}205$$

2. Ойын тасы 3 рет лақтырғанда 3 рет "6"шығу ықтималдығы (p=1/6):

$$w(3/3,1/6) = \frac{3!}{3!0!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{216} = 0{,}005$$

3. Нәрестенің ұл болу ықтималдығы p=0,515 болса, 10 жаңа

туған нәрестенің 5-інің ұл болу ықтималдығы:

$$w(5/10;0{,}515)=\frac{10!}{5!5!}(0{,}515)^5(0{,}485)^5=252\cdot0{,}036\cdot0{,}027=0{,}245$$

1.2.4 Биномдық үлесу қасиеттері

(1.1) өрнектегі *к* шамасы кездейсоқ шама, өйткені оқиғаның қашан болары белгісіз, біз тек оқиғаның тууын белгілі бір ықтималдықпен жорамалдай аламыз. Ықтималдық теориясында кездейсоқ шамаларды *дискретті* және *үздіксіз* деп екіге бөледі.

Дискретті кездейсоқ шама шекті немесе санаулы сандар мәніне ие болады. Бұл сандар жиынтығы немесе дискретті мәндерге ие функция болуы мүмкін. *Үздіксіз кездейсоқ оқиға* үздіксіз мәндер жиынтығына ие болады (математикалық анализдегі үздіксіздік туралы ұғымды еске түсіріңіз).

Мысалы, (1.1) өрнектегі *к* кездейсоқ шамасы дискретті шама, ал *а* физикалық шаманың (үдеу, дененің сызықтық өлшемі, жылуөткізгіштік және т.т.) көп қайталанған өлшеу нәтижелері - үздіксіз кездейсоқ шамалар, өйткені өлшеу кезінде белгілі бір интервалдағы кез-келген мәндер алынуы мүмкін.

Кездейсоқ шаманың ықтималдық арқылы табылған арифметикалық ортасын *математикалық күтім* деп атайды. Математикалық күтім

$$m_k=\sum_{k=0}^{n}kw\left(\frac{k}{n},p\right) \tag{1.2}$$

2 ҚОСЫМШАДА көрсетілгендей, биномдық үлесу үшін

$$m_k=np. \tag{1.3}$$

Егер $p=q$, онда математикалық күтім ең ықтималды мәнге тең болады. Сондықтан да тиынмен жасалған тәжірибеде максимал ықтималдық тиындардың бірқалыпты үлесуіне сәйкес келеді (екі күй – “елтаңба” немесе “сан” - бойынша бірдей).

Дисперсия – ықтималдығын ескере отырып алынған кездейсоқ шаманың математикалық күтімнен ауытқуларының квадраттарының орташа мәні:

$$\sigma_k^2 = \sum_{k=0}^{n} (k - m_k)^2 w\left(\frac{k}{n}, p\right). \qquad (1.4)$$

Дисперсия шама мәндерінің орта мәннен шашырауын сипаттайды. **2 ҚОСЫМШАДА** берілгендей, биномдық үлесу үшін

$$\sigma_k^2 = npq. \qquad (1.5)$$

1.2.5 Биномдық үлесуді молекулалық физикада қолдану

Макрокүй ықтималдығы

Макрокүй саны өте көп микрокүйлер арқылы жүзеге асады. Егер осы макрокүйдің барлық белгілері мәлім болса, онда осы белгілерге сәйкес келетін барлық микрокүйлерді көрсетуге және олардың санын санауға болады.

Айталық, Γ_α-микрокүйлер саны, ал α макрокүйді сипаттасын, Γ_o-барлық микрокүйлер саны болсын. Онда, микрокүйлердің тең ықтималдығы туралы постулат негізінде, қарастырып отырған макрокүй ықтималдығы:

$$w(\alpha) = \Gamma_\alpha / \Gamma_0 \ .$$

Мынадай белгілер енгізейік: V-идеал газ алып тұрған көлем, n-V көлемдегі бөлшектер саны, $N=V/d^3$ - бөлшектер орналаса алатын ұяшықтар саны. Бөлшек диаметрі $d \approx 10^{-10}$ м, $d^3 \approx 10^{-30}$ м^3, сондықтан N өте үлкен сан және $N>>n$.

V көлемнің бір тұрақты бөлігі болып табылатын V_1 көлемде барлық n бөлшектің саны $к$ бөлшек орналасатын жүйе макрокүйінің ықтималдығы $w(k/n,p)$-ны табайық. Есеп шарты бойынша $V_1 \le V$, $k \le n$. Және k бөлшек орналасатын ең болмағанда k ұяшығы болу үшін V_1 көлем өте кіші болмау керек. Сондықтан V_1 көлемдегі ұяшықтар саны $N_1=V_1/d^3 \ge k$. Айталық, бөлшектерді бір-бірінен айыруға болады (мысалы, бөлшектер нөмірленген болсын). Сонда белгілі бір ұяшықта орналасқан бөлшектердің ішінен ең болмағанда екеуі ұяшықтарын алмастырып, орын ауысса, онда микрокүй өзгерді деп саналады. Мұнда қарастырылып отырған бөлшектер өздерінің барлық қасиеттері жағынан бірдей екендігіне және қарастырылып отырған екі күй де эквивалентті екендігіне қарамастан, жүйе бір микрокүйден екінші микрокүйге өтті деп есептейміз.

Осы модель биномдық эксперименттің математикалық моделіне сәйкес келеді:

- Жүйедегі бөлшек саны тұрақты және n-ге тең.
- Тең ықтималдық туралы постулат бойынша барлық микрокүйлер тең ықтималды.
- Жеке бөлшектің V_1 көлемде болу ықтималдығы $p=N_1/N=V_1/V$, ал V_1 мен V тұрақты болғандықтан, p тұрақты шама.
- Бөлшектің V_1-ден тыс басқа V-V_1 көлемде болу ықтималдығы $q=1-p$.

Яғни, іздеп отырған ықтималдықты биномдық үлесу (1.1) арқылы табуға болады. (1.1) өрнекті идеал газға қолданғанда V_1 көлем шамасының ешқандай маңызы жоқ. V_1 көлем жеке бөлшектің ықтималдығы p-ға көрнекілік беру үшін ғана енгізілді.

k-ның өте кіші ($k\to 0$) және өте үлкен ($k\to\infty$) мәндерінде ықтималдық $w(k/n,p)$ өте кіші шама:

$$w(k/n,p)\approx q^n \to 0 \quad , \quad w(k/n,p)\approx p^n \to 0.$$

Өйткені, q және p бірден кіші, ал n үлкен шама. k-ның 0 мен ∞ аралықтағы бір мәнінде $w(k/n,p)$ максимумға жетеді. Оны табу үшін

$$\frac{dw(k/n,p)}{dk}=0 \qquad (1.6)$$

теңдеуін шешу керек.

Ә.1.6.1 көрсетілгендей $n_{max}=n_0$., n_0 - бөлшектердің көлемде біркелкі орналасуына сәйкес келетін концентрациясы. Осыдан мынадай қорытынды жасауға болады: *бөлшектердің барлық көлемде біркелкі орналасуына сәйкес келетін концентрациясы V_1 көлемдегі бөлшектердің ең ықтималды концентрациясы болып табылады.*

V_1 көлемнің V көлем ішінде орналасуы еркін болғандықтан, көлем ішіндегі молекулалар санының біркелкі үлесуі осы көлемдегі бөлшектердің концентрациясының ең ықтималды мәніне сәйкес болады. Анықтама бойынша осындай тұйық жүйе стационарлық және тепе-теңдік күйдегі жүйе болып табылады. Сонымен, алынған нәтиже былай тұжырымдалады:

Жүйенің тепе-теңдік күйі оның ең ықтималды күйі болады.

Флуктуациялар

Белгілі бір көлемдегі бөлшектер саны уақыт бойынша тұрақты болып қалмайды. Жүйе күйі биномдық үлесумен бейнеленгендіктен, V_1 көлемдегі бөлшектердің орташа саны биномдық үлесудің математикалық күтіміне (1.3) тең:

$$<k>=m_k=pn. \qquad (1.7)$$

Егер физикалық шаманың мәні орташа маңында өзгеріп отырса, онда физикалық шама флуктуацияға ұшырады деп айтады. Флуктуация шамасын орташадан стандарттық ауытқу арқылы табуға болады. Стандарттық ауытқу түбір астындағы дисперсияға тең және биномдық үлесу үшін (1.5)-тен анықталады:

$$\sigma=\sqrt{\left\langle(\Delta k)^2\right\rangle}=\sqrt{npq} \qquad (1.8)$$

Соңғы екі теңдеуден мынадай қорытынды жасауға болады: жүйедегі бөлшек саны бойынша стандарттық ауытқу (1.8) орташаға (1.7) қарағанда баяу өседі ($\sigma \sim \sqrt{n}$, $m_k \sim n$).

Салыстырмалы стандартты ауытқу:

$$\frac{\sqrt{\left\langle (\Delta k)^2 \right\rangle}}{\langle k \rangle} = \sqrt{\frac{q}{p}}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Осы өрнектен көрініп тұрғандай, *жүйедегі бөлшектер саны көбейсе, салыстырмалы стандарттық ауытқу кемиді.*

$q=1-p$, ал $p=V_1/V$ екенін еске алсақ,

$$\frac{\sqrt{\left\langle (\Delta k)^2 \right\rangle}}{\langle k \rangle} = \sqrt{\frac{V}{V_1}-1}\frac{1}{\sqrt{n}} \qquad (1.9)$$

Флуктуацияның салыстырмалы шамасы $V_1 \to V$ жағдайында нөлге ұмтылады да, $V_1=V$ болғанда нөлге тең болады, өйткені барлық көлемдегі бөлшектер саны тұрақты және n-ға тең. Сондықтан бөлшектер санының флуктуациясы болмайды. (1.9) өрнекке сәйкес, V_1 кемігенде флуктуация өседі. (1.9) өрнекте $V_1 << V$ үшін түбір астындағы 1-ді елемей, алатынымыз:

$$\frac{\sqrt{\left\langle (\Delta k)^2 \right\rangle}}{\langle k \rangle} = \sqrt{\frac{V}{V_1}}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Осы өрнектен мынадай қорытынды жасауға болады: *көлем кішірейген сайын осы көлемдегі салыстырмалы флуктуацияның мәні арта түседі.*

Расында, егер бірнеше ғана бөлшегі бар кіші көлемді қарастырсақ, онда салыстырмалы флуктация бөлшек санының едәуір үлесін құрайды. Мысалы, қарастырып отырған көлемде барлығы 10-ақ бөлшек болса, салыстырмалы стандарттық ауытқу 1/3-ге дейін жетеді, ал қалыпты атмосфералық жағдайдағы 1 мм^3 көлемдегі бөлшек саны мөлшермен $2{,}7 \cdot 10^{16}$, ал салыстырмалы стандарттық ауытқу небәрі 10^{-8} болады.

Сондықтан, *өте көп бөлшектен тұратын макроскопиялық* *жүйедегі статистикалық флуктациялар азғантай болғандықтан, физикалық шамалар өзінің орта мәніне тең деп үлкен дәлдікпен айта аламыз.*

1.2.6 Лаплас-Гаусс үлесуі

Ықтималдық үлесуінің биномдық заңы $n \to \infty$ жағдайында Лаплас-Гаусс өрнегін береді.

Факториалдарға Стирлинг өрнегін қолданып, (1.2) өрнекті төмендегідей жазуға болады (**3 ҚОСЫМШАНЫ** қараңыз):

$$w\left(\frac{k}{n}, p\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}} \qquad (1.10)$$

Осыны *Лаплас-Гаусс өрнегі* деп атайды. Осы үлесу биномдық үлесуге сәйкес екенін ескерсек, онда Лаплас-Гаусс үлесуінің математикалық күтімі мен дисперсиясы (1.3) және (1.5) өрнектер бойынша есептеледі. Сонымен, (10)-ды басқаша жазуға болады:

$$w\left(\frac{k}{n}, p\right) = \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(k-m_k)^2}{2\sigma_k^2}} \qquad (1.11)$$

Демек, n үлкен болғанда (n>10) (1.1) өрнек орнына (1.10), (1.11) өрнектерді қолдануға болады.

Айта кетейік, бұл жерде k кездейсоқ шамасы биномдық заңдағыдай дискретті шама болып табылады.

1.2.7 Гаусс үлесуі

Тәжірибеде өлшенетін физикалық шаманың мәні кездейсоқ шама екенін жете түсіну эксперимент нәтижесін өңдеу үшін ықтималдық теориясын қолдануға мүмкіндік береді. Расында, "Механика" бөліміндегі №1 лабораториялық жұмыста электр импульстарын өлшеу нәтижелері Гаусс үлесуіне сай келетін:

$$w(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}, \qquad (1.12)$$

мұнда m_x - x шамасының математикалық күтімі, σ_x^2 - дисперсия.

Өлшенген x шамасының x, $x+dx$ интервалында болу ықтималдығы $w(x)$ функциясымен анықталады (аталған ықтималдылық $w(x)dx$-ке тең).

“Өлшеуіш құрал - зерттелуші объект” жүйесіне n кездейсоқ, бақылануы мүмкін емес себептер әсер етеді. Осылардың әрқайсысы бір-біріне тәуелсіз $+\sigma$ және $-\sigma$ ауытқу тудырады және де $p(+\sigma)+p(-\sigma)=1$. Осы ауытқулар жиынтығы физикалық шама мәнінің $\Delta x=x-\langle x\rangle$ қателігіне алып келеді.

Осы модель терминдердің атауына дейінгі дәлдікпен биномдық эксперимент моделіне сәйкес келеді, ал Лаплас-Гаусс үлесуі (1.11) практика жүзінде Гаусс заңына (1.12) сәйкес. Осы өрнектер арасындағы айырмашылық біреу-ақ. Ол-(1.11) үлесуде кездейсоқ шама k - дискретті шама болса, (1.12) үлесудегі аргумент- үздіксіз кездейсоқ шама x. Үздіксіз кездейсоқ x шамасының негізгі сипаттамалары–математикалық күтім мен дисперсия-төменгі өрнектермен анықталады:

$$m_x=\int xw(x)dx,\ \ \sigma_x^2=\int(x-m_x)^2w(x)dx$$

Гаусс үлесуін (1.12) қолдана отырып идеал газ молекулаларының жылдамдық пен кинетикалық энергия бойынша үлесуін-Максвелл үлесуін алуға болады (**4 ҚОСЫМШАНЫ** қараңыз).

1.2.8 Эксперимент жүргізу әдістемесі

Биномдық үлесудің орындалуын эксперимент жүзінде тексеру үшін тиындарды лақтыру тәжірибесін жүргізейік. Жабық қораптың ішінде n=12 бірдей тиын бар. Жоғары лақтырылған 12 тиынның ішінде “k” тиынның “елтаңбамен” түсуінің ықтималдығын эксперимент жүзінде анықтау үшін 12 тиынды бір мезгілде жоғары сілкіп, “елтаңбасымен” түскен тиындарды санап отыру керек. Айталық, осы тәжірибе *N* рет жүргізілді. Қанша тәжірибеде “k” тиынның “елтаңбасымен” түскен саны *N(k)*-ны тауып, *N(k)/N* салыстырмалы түсу жиілігін анықтаймыз. Бұл арада k=0, 1, 2, 3,..,12 мәндеріне тең деп алынады.

Тәжірибе саны көбейген сайын “k” тиынның “елтаңбасымен” түсуінің *N(k)/N* салыстырмалы түсу жиілігі n=12 тиынды лақтырғанда “k” тиынның “елтаңбасымен” түсуінің W(k/n,P) ықтималдығына жақындай береді.

Тәжірибе саны неғұрлым көп болса, эксперимент нәтижесі соғұрлым дәлірек болады және эксперимент жүзінде анықталған ықтималдық теориялық ықтималдықпен (1.1)

$$w(k/n,p)=\lim_{N\to\infty}N(k)/N$$

бірдей болады.

Дегенмен, тәжірибе саны шектеулі болғандықтан,

$$w(k/n,p)\approx N(k)/N$$

деп қабылдаймыз.

1.4 Жұмыстын орындалу тәртібі

1.4.1 Әрбір жеке тәжірибеде “елтаңбамен” (немесе “сан” жағымен) жоғары түскен тиындарды санап отырып, 100-150 тәжірибе жасау керек. Нәтижені 1.1 кестеге еңгізіңдер.

Егер экспериментатор әрбір тәжірибе нәтижесін *k*-ның сәйкес шамасының үстінен таңбалап (x, *, o, Δ және б.) отырса, онда эксперимент соңында төменде көрсетілгендей гистограмма шығады.

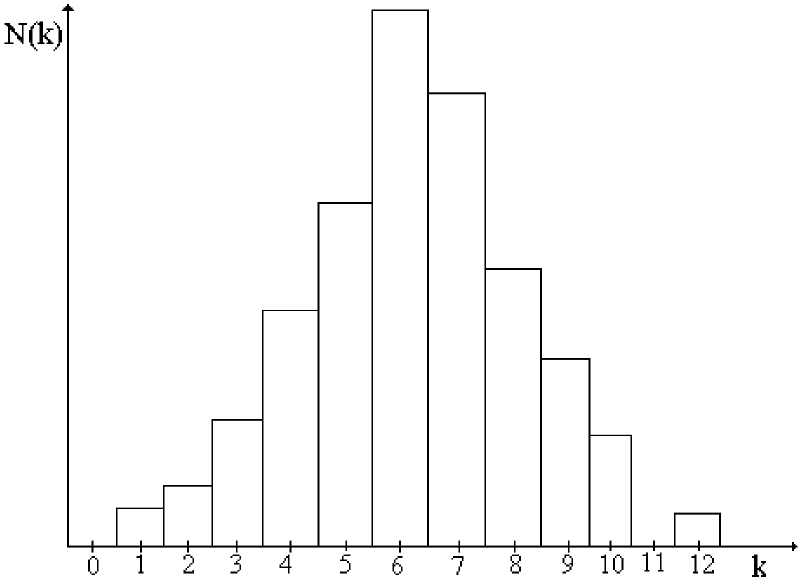
1.1кесте

Елтаңбамен жоғары түскен тиындар саны

№	*k*	№	*k*	№	*k*
1		34		67	
2		35		68	

...		…		…	
33		66		100	

1.4.2 Тұрғызылған гистограммадан *k* кездейсоқ шамасының туу жиілігі *N(k)* мен эксперименттік ықтималдық *w=N(k)/N* мәнін анықтап, оны 1.2 кестеге жазыңыз.



1.2 кесте

Эксперимент нәтижесі бойынша математикалық күтім мен дисперсия σ^2-ты анықтау

K	*N(k)*	*w=N(k)/N*	*k w*	$\Delta k=k-m$	$\Delta k^2\ w$
0					
1					
2					
…					
12					

Σ	N	1	m=	0	σ^2=

1.4.3 Төменгі кестелерді пайдаланып, (1.2), (1.10) және (1.11) өрнектер арқылы теориялық ықтималдық үлесулерін табу керек.

1.3 кесте

Биномдық үлесуді (БҮ) есептеу (n=12)

K	$C_{12}^k = \dfrac{12!}{k!(12-k)!}$	$w_{БУ} = C_{12}^k \left(\dfrac{1}{2}\right)^k \left(\dfrac{1}{2}\right)^{12-k} = \dfrac{C_{12}^k}{4096}$
0		
1		
2		
…		
12		

1.4 кесте

Лаплас-Гаусс (ЛГ) үлесуін есептеу n=12 (m_k=6, σ_k^2=3)

k	$z = \dfrac{(k-6)^2}{6}$	e^{-z}	$w_{ЛГ} = \dfrac{1}{\sqrt{3 \cdot 2\pi}} e^{-z} = 0,23e^{-z}$
0			
1			
2			
…			
12			

Гаусс үлесуін есептеу үшін эксперимент арқылы табылған 1.2 кестедегі m_x, σ_x^2-ты пайдаланыңыз.

1.5 кесте

Гаусс үлесуін (Г) есептеу m_x=…, σ_x^2=… .

X	$z = \dfrac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}$	e^{-z}	$w_Г = \dfrac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-z}$

0			
1			
2			
…			
12			

1.4.4 1.2-1.5 кестелер бойынша барлық үлесулер мен эксперименттік нәтижелерді салыстыру үшін қорытынды кесте түзіңіз (1.6 кесте).

1.6 кесте

Ықтималдық үлесулерін салыстыру

$k = x$	$w_{экс}$	$w_{БУ}$	$w_{ЛГ}$	$w_{Г}$
0				
1				
2				
…				
12				

1.4.5 1.6 Кесте бойынша бір графикте $w_{БУ}$, $w_{ЛГ}$, $w_{Г}$ үлесуін тұрғызыңыз. Осы графикте эксперимент нәтижелерін таңба арқылы белгілеңіз.

1.4.6 Алынған нәтижені талқылаңыз және айырмашылық себептерін түсіндіріп, қорытынды жасаңыз.

1.6 Әдебиет

1.6.1 Матвеев А.Н. Молекулярная физика: учебник для физических специальностей вузов. Изд. 2-е, перераб. И дополн. – М.: Высшая школа, 1987. – 360 с.

1.6.2 Хадсон Д. Статистика для физиков. – М.: Мир, 1967.

1.6.3 Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория вероятностей. Математическая статистика. – М.: Гардарика, 1998. – 326 с.

1 ҚОСЫМША

Биномдық үлесуді қорыту

Төрт А, В, С, Д тиындарымен тәжірибе жасалсын. Айталық, тәжірибенің біреуінде барлық тиын "елтаңбамен" жоғары түссін (k=4) – "Е" күйі. Мұндай орналасуды төмендегідей тіркеспен өрнектейік: А(Е), В(Е), С(Е), Д(Е) (Е - "елтаңба"). Тәуелсіз кездейсоқ оқиғалар ықтималдықтарының көбейтіндісі туралы ережеге сәйкес, осы күйдің ықтималдығы $pppp=p^4$. Барлық тиындар кез-келген ретпен орналаса алатындықтан, бұл күй тек бір-ақ жолмен іске асады.

Енді басқа бір тәжірибеде кез-келген үш тиын (k=3) "Е" күйде, ал біреуі "С" ("С" - "сан" жағымен түсу) күйде болсын. Мұндай мүмкіншіліктер саны төртеу: А(Е)В(Е)С(Е)Д(С), А(Е)В(Е)С(С)Д(Е), А(Е)В(С)С(Е)Д(Е) және А(С)В(Е)С(Е)Д(Е). Мұндағы әр күйдің ықтималдығы $ppp=p^3$ болғандықтан, жоғарыда келтірілген төрт мүмкіншіліктің біреуінің туу ықтималдығы, үйлесімсіз кездейсоқ оқиғалардың қосылу ережесіне сай, $4p^3$-ке тең болады.

k=2 үшін екі күй "Е" мен "С" бойынша орналасу мүмкіншіліктер саны алты, ал осы алты орналасудың біреуінің іске асу ықтималдығы $6p^2q^2$-ға тең (осылай болатынын өзіңіз көрсетіңіз).

Осы жоғарыда келтірілген нәтижелер 1Қ кестеге жиналды.

Кесте 1Қ

Екі күй бойынша тиындардың үлесуі (n=4, p=0,5)

күйлер реті	Күй		K	C_4^k	P^kq^{4-k}	$w(k/4;0,5)$
	"E"	"C"				
1	ABCD	-	4	1	16	1/16
2	ABC	D	3	4	16	4/16
3	ABD	C				
4	ACD	B				
5	BCD	A				
6	AB	CD	2	6	16	6/16

7	AC	BD				
8	AD	BC				
9	CD	AB				
10	BD	AC				
11	BC	AD				
12	D	ABC	1	4	16	4/16
13	C	ABD				
14	B	ACD				
15	A	BCD				
16	-	ABC D	0	1	16	1/16
Σ				16		1

Кестеден мынаны аңғару қиын емес: тиындардың белгілі бір күйде (“Е”) орналасу саны жіктелген екі мүше (Ньютон биномы) жанындағы сандық коэффициентерге тең:

$$(p+q)^4=1p^4+4p^3q+6p^2q^2+4pq^3+1q^4,$$

Биномдық коэффициенттер n=4 элементтен k=4,3,2,1,0 бойынша теру санына тең (кесте 1 Қ-ны тексеріп көріңіз):

$$C_4^k = 4!/k!(4-k)!.$$

Ньютон биномының әр қосылғышы жеке бір күйдің ықтималдығын анықтайды:

$$w(k/4,p)=C_4^k p^k q^{4-k}$$

Егер осы өрнек n=4 үшін дұрыс болса, онда ол *(n+1)* үшін де дұрыс болады (математикалық индукция әдісі), яғни ол n=4, 5… үшін де дұрыс болады.

Сонда n тиын үшін:

$$w(k/n,p)=C_n^k p^k q^{n-k}$$

Соңғы қатынас *биномдық үлесу* деп аталады және ол n сынақ кезінде бізді қызықтырып отырған оқиғаның (тиындардың "елтаңбамен" жоғары түсуінің) дәл k рет болу ықтималдығын анықтайды.

Екі ғана күйде (“Е” мен “С”) бола алатын физикалық жүйе үшін биномдық үлесу жеке бір күйдің туу ықтималдығын есептеуге мүмкіндік береді.

2 ҚОСЫМША

Биномдық үлесу сипаттамалары

1 Математикалық күтім

Биномдық үлесудің математикалық күтімін табайық. Ол үшін (1.1)-ді (1.2)-ге қойып, алатынымыз:

$$m_k = \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = 0 + \frac{n!}{1!(n-1)!} pq^{n-1} +$$

$$+ \frac{n!}{2!(n-2)!} p^2 q^{n-2} + \ldots + \frac{n!}{n!0!} p^n q^0$$

Бұл өрнекті факториал қасиеттерін *n!=n(n-1)!, n!=n(n-1)(n-2)!, ...* пайдаланып, жеңілдетуге болады:

$$m_k = npq^{n-1} + n(n-1)p^2 q^{n-2} + \ldots + p^n =$$
$$= np\left(q^{n-1} + (n-1)pq^{n-2} + \ldots + p^{n-1}\right) = np(q+p)^{n-1} = np\cdot$$

Бұл жерде $q+p=1$ болғандықтан, $(q+p)^{n-1}=1$.

Сонымен, биномдық үлесудің математикалық күтімі $m_k=np$.

2 Дисперсия

Биномдық үлесудің дисперсиясы математикалық анықтамаға (1.4) сәйкес:

$$\sigma_k^2 = \sum_{k=0}^{n}(k-m_k)^2 w\left(\frac{k}{n}, p\right),$$

$$\sigma_k^2 = \sum_{k=0}^{n}\left(k^2 - 2km_k + m_k^2\right)W\left(\frac{k}{n}, p\right) = \sum_{k=0}^{n} k^2 W\left(\frac{k}{n}, p\right) -$$

$$-2m_k \sum_{k=0}^{n} kW\left(\frac{k}{n}, p\right) + m_k^2 \sum_{k=0}^{n} W\left(\frac{k}{n}, p\right)$$

Осы өрнектегі бірінші қосылғыш k^2 шамасының математикалық күтімі болса, екіншісі - k шамасының математикалық күтімі, ал үшінші қосылғыш n тәжірибе кезінде "елтаңбаның" 0, 1, 2, ..., n рет түсуінің толық ықтималдығы болып табылады. Осы ықтималдық 1-ге тең болуы керек, өйткені n тәжірибе кезінде кез-келген "елтаңбаның" түсуі абсолютті ақиқат оқиға:

$$\sum_{k=0}^{n} W(k/n, p) = 1$$

Бұл өрнек *нормалау шарты* деп аталады. Жоғарыда айтылғанды тұжырымдай келе, дисперсия өрнегі былай жазылады:

$$\sigma_k^2 = m_{k^2} - 2m_k^2 + m_k^2 = m_{k^2} - m_k^2 = m_{k^2} - (np)^2$$

m_{k^2} шамасын есептеу үшін келесі тепе-теңдікті пайдаланайық:

$$k^2 = k^2 + k - k = k(k-1) + k$$

Осыдан $m_{k^2} = m_{k(k-1)} + m_k = m_{k(k-1)} + np$

Соңғыны дисперсия өрнегіне қойып, алатынымыз:

$$\sigma_k^2 = m_{k(k-1)} + np - (np)^2$$

Енді математикалық күтім анықтамасын *k(k-1),* функциясына қолданып, төменгі өрнекке келеміз:

$$m_{k(k-1)} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k} =$$
$$= 0 + 0 + 2\frac{n!\,p^2q^{n-2}}{2!(n-2)!} + 3\cdot 2\frac{n!\,p^3q^{n-3}}{3!(n-3)!} + \ldots + n(n-1)\frac{n!\,p^n}{n!0!} =$$
$$= n(n-1)p^2q^{n-2} + n(n-1)(n-2)p^3q^{n-3} + \ldots + n(n-1)p^n =$$
$$= n(n-1)p^2\left[q^{n-2} + (n-2)pq^{n-2} + \ldots + p^{n-2}\right] = n(n-1)p^2$$

Бұл арада квадраттық жақша ішіндегі қосынды бірге тең:

$$q^{n-2} + (n-2)pq^{n-2} + \ldots + p^{n-2} = (q+p)^{n-2} = 1$$

Сонымен, биномдық үлесудің дисперсиясы мына түрде жазылады:

$$\sigma_k^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = (np)^2 - np^2 + np - (np)^2 = np(1-p)$$

1-p=q-ға тең екенін ескерсек: $\sigma_k^2 = npq$

3 ҚОСЫМША

Лаплас-Гаусс үлесуін қорыту

Факториал үшін (*n>10*) үшін орындалатын Стирлинг өрнегін

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n},$$

қолданып, биномдық үлесуді түрлендірейік:

$$W\left(\frac{k}{n}, p\right) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}}{\sqrt{2\pi k} k^k e^{-k} \sqrt{2\pi(n-k)} (n-k)^{n-k} e^{-(n-k)}} p^k q^{n-k} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \frac{n^{n-k+k}}{k^k (n-k)^{n-k}} p^k q^{n-k} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}$$

u=k-np жаңа айнымалы енгізейік. Сонда, *k=u+np* арқылы жазылған жоғарыдағы өрнек мына түрге келеді:

$$W\left(\frac{k}{n}, p\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{(u+np)(n-u-np)}} \left(\frac{np}{u+np}\right)^{u+np} \left(\frac{nq}{n-u-np}\right)^{n-u-np}$$

p=1-q, екенін еске алып, жақша сыртына *np* мен *nq*-ді шығарып, біраз жеңіл математикалық амалдардан соң төмендегіні аламыз:

$$W\left(\frac{k}{n}, p\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{u}{np}\right)\left(1-\frac{u}{nq}\right)}} \left(1+\frac{u}{np}\right)^{-(np+u)} \left(1-\frac{u}{nq}\right)^{-(nq-u)}$$

Егер $n \to \infty$, онда $u/np << 1$ және $u/nq << 1$.

Сондықтан, радикал астында тек бірді қалдырса болды.

Соңғы көбейткіштерде мұны қолдануға болмайды, өйткені дәреже көрсеткіші жоғарырақ.

Соңғы өрнекті логарифмдесе:

$$\ln W\left(\frac{k}{n}, p\right) = -\ln\sqrt{2\pi npq} - (np+u)\ln\left(1+\frac{u}{np}\right) - (nq-u)\ln\left(1-\frac{u}{nq}\right)$$

Логарифмдік функцияны қатарға жіктеу өрнегіндегі:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$$

алғашқы екі қосылғышпен шектеліп, алатынымыз:

$$\ln\left(1+\frac{u}{np}\right) = \frac{u}{np} - \frac{1}{2}\left(\frac{u}{np}\right)^2,$$

$$\ln\left(1-\frac{u}{nq}\right) = -\frac{u}{nq} - \frac{1}{2}\left(\frac{u}{nq}\right)^2$$

Соңғыларды бастапқы өрнекке қойып, *p+q=1* екенін есте ұстап, алгебралық түрлендірулерден соң төменгі түрге келеміз:

$$\ln\frac{W(k/n, p)}{\sqrt{2\pi npq}} = -\frac{u^2}{2npq}$$

Осыдан бастапқы айнымалыға қайта көшіп, потенциялағаннан соң ізделіп отырған соңғы өрнекті табамыз:

$$W(k/n, p) = 1/\sqrt{2\pi npq}\; e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}$$

Осы өрнек *Лаплас-Гаусс үлесу* өрнегі. Лаплас-Гаусс үлесуін қорыту барысында *n>10* үшін дұрыс болатын Стирлингтің факториалды түрлендіру өрнегі қабылданғандықтан, Лаплас-Гаусс өрнегі тек $n>10$ болғанда ғана қолданылады. $n\to\infty$ Лаплас-Гаусс өрнегі биномдық үлесуге ауысады.

4 ҚОСЫМША

Максвелл үлесуін қорыту

Саны өте көп молекулалар соқтығысы әсерінен термодинамикалық тепе-теңдік күй орнайды. Жеке бір қақтығыстан кейін молекула жылдамдығының проекциялары кездейсоқ $\Delta\upsilon_x$, $\Delta\upsilon_y$, $\Delta\upsilon_z$ өзгеріске ұшырайды және де бұл өзгерістер бір-біріне тәуелсіз болады.

Бастапқы уақыт мезетінде тыныштықта тұрған молекуланың қозғалысын қарастырайық. Басқа молекулалармен i-інші соқтығыстан кейін молекуланың жылдамдық проекцияларының өзгерісі $\Delta\upsilon_{xi}$, $\Delta\upsilon_{yi}$, $\Delta\upsilon_{zi}$. болсын. Молекула өте көп соқтығыс жасайтын жеткілікті уақыттан кейін жылдамдық проекциялары:

$$\upsilon_x = \sum_i \upsilon_{xi}, \upsilon_y = \sum_i \upsilon_{yi}, \upsilon_z = \sum_i \upsilon_{zi} \quad .$$

Әрбір жылдамдық проекциялары Гаусс заңы орындалатын өте көп кездейсоқ шамалардың қосындылары болып келеді (Ә.1.6.1 қараңыз). Осыдан жылдамдық проекцияларының ықтималдық үлесуінің тығыздығы төменгі түрде жазылады:

$$\varphi\left(\upsilon_x^2\right) = Ae^{-\alpha v_x^2}, \varphi\left(\upsilon_y^2\right) = Ae^{-\alpha v_y^2}, \varphi\left(\upsilon_z^2\right) = Ae^{-\alpha v_z^2}, \quad \text{(Қ1)}$$

А мен a координат өстері толық эквивалентті және υ_x, υ_y, υ_z кездейсоқ шамалары тәуелсіз болғандықтан, барлық үш проекциялар үшін бірдей тұрақтылар.

Жылдамдықтың x-өсіне проекциясының $[\upsilon_x, \upsilon_x+d\upsilon_x]$, интервалында болу ықтималдығы:

$$dP\left(\upsilon_x\right) = \varphi\left(\upsilon_x^2\right)d\upsilon_x = Ae^{-\alpha\upsilon_x^2}d\upsilon_x \quad \text{(Қ2)}$$

Осындай өрнектер басқа проекциялар үшін де дұрыс болады.

Жылдамдық проекцияларының $[\upsilon_x,\ \upsilon_y,\ \upsilon_z,\ \upsilon_x+d\upsilon_x,\ \upsilon_y+d\upsilon_y,\ \upsilon_z+d\upsilon_z]$, интервалында болу ықтималдығы ықтималдықты көбейту ережесі бойынша:

$$dP(\upsilon_x,\upsilon_y,\upsilon_z)=A^3e^{-\left[\alpha\left(\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2\right)\right]}d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z \qquad (Қ3)$$

А тұрақтысы нормалау шартынан табылады:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dP(\upsilon_x,\upsilon_y,\upsilon_z)=1 \qquad (Қ4)$$

Бұл шарттың мағынасы мынада: жылдамдық проекциясының ($-\infty,\infty$), интервалында болуы ақиқат оқиға, яғни осы интервалдағы ықтималдық 1-ге тең.

Егер

$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha\upsilon_x^2}d\upsilon_x=\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}$ екенін ескерсек, онда (Қ4)-тен шығатыны:

$$A=\sqrt{a/\pi} \qquad (Қ5)$$

Молекуланың орташа кинетикалық энергиясы:

$$\left\langle\frac{m\upsilon^2}{2}\right\rangle=\frac{m}{2}\left\langle\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2\right\rangle=\frac{m}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2\right)dP(\upsilon_x,\upsilon_y,\upsilon_z)=$$

$$=\frac{m}{2}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2\right)\exp\left[-\alpha\left(\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2\right)\right]d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z\cdot$$

Мұндай түрдегі интегралдар былай табылады:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \upsilon_x^2 e^{-\alpha \upsilon_x^2} d\upsilon_x = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \upsilon_x^2} d\upsilon_x = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{1}{2} \alpha^{-3/2} \sqrt{\pi} \cdot$$

Осыны әрбір интегралға қолданып алатынымыз:

$$\langle m\upsilon^2/2 \rangle = 3/4 m/a$$

Орташа кинетикалық энергия мен температура арасындағы: $\langle m\upsilon^2/2 \rangle = 3/2\, kT$ байланысты пайдаланып, α өрнегін табайық: $\alpha = m/2kT$

Соңғы мен (Қ5) өрнегін (Қ3)-ке қойсақ,

$$dP(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z) = (m/2\pi kT)^{3/2} e^{-\frac{m(\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2)}{2kT}} d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z \qquad \text{(Қ6)}$$

Жылдамдық проекцияларының үлесуінен жылдамдық модулінің үлесуіне көшейік. Ол үшін жылдамдық үлесуінің изотропты екенін ескеріп, жылдамдықтар кеңістігінде сфералық координаттар жүйесінде радиусы $\upsilon=(\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2)^{1/2}$, қалыңдығы $d\upsilon$ сфералық қабат бойынша (Қ6) теңдеуін интегралдайық. Сонда алатынымыз:

$$d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z = \upsilon^2 d\Omega d\upsilon,$$

мұндағы $d\Omega$ - координат басынан сфералық қабаттың элементі көрінетін денелік бұрыш.

Бүкіл сфералық қабаттың беті бойынша алынған интеграл

$$\int_{\Omega=4\pi} \upsilon^2 d\Omega = \upsilon^2 \int_{\Omega=4\pi} d\Omega = 4\pi \upsilon^2$$

Сонымен (Қ6) өрнегін сфералық $d\upsilon$, бойынша интегралдап, молекуланың жылдамдығы модулінің $[\upsilon, \upsilon+d\upsilon]$ интервалында болу ықтималдылығын анықтаймыз:

$$dP(\upsilon) = 4\pi (m/2\pi kT)^{3/2} e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} \upsilon^2 d\upsilon$$ функция

$$f(\upsilon) = 4\pi (m/2\pi kT)^{3/2} e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} \upsilon^2 \qquad (Қ7)$$

Соңғы өрнек Максвеллдің *ықтималдық үлесуінің тығыздығы* деп аталады. Молекулалар қозғалысы тәуелсіз әрі кездейсоқ болғандықтан, жылдамдықтары $[\upsilon, \ \upsilon + d\upsilon]$ интервалында жататын молекула саны

$$dn(\upsilon) = ndP(\upsilon),$$

бұл жерде n - жүйедегі барлық молекула саны. $[\upsilon, \ \upsilon + d\upsilon]$ интервалындағы молекулалардың салыстырмалы саны:

$$dn(\upsilon)/n = dP(\upsilon) = f(\upsilon)d\upsilon.$$

(Қ7) ескеріп, Максвеллдің жылдамдық модулі бойынша үлесуін аламыз:

$$d\frac{n(\upsilon)}{n} = 4\pi (m/2\pi kT)^{3/2} e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} \upsilon^2 d\upsilon \qquad (Қ8)$$